



Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID: 9113

To cite this document: Haine, Ghislain *Reconstruction de la partie observable de la donnée initiale d'un système linéaire*. (2012) In: Séminaire de mathématiques appliquées, 13 Dec 2012, Clermont-Ferrand, France. (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@inp-toulouse.fr

Reconstruction de la partie observable de la donnée initiale d'un système linéaire.

Ghislain HAINE

Université de Lorraine (IECN) – CNRS
Inria Nancy - Grand Est – Équipe CORIDA

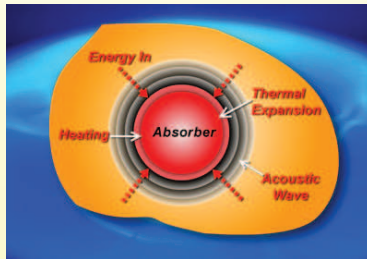
13 Décembre 2012

Motivation

Les problèmes de reconstruction de donnée initiale (ou finale) arrivent fréquemment.

- Océanographie,
- Météorologie,
- Géologie,
- Imagerie Médicale,
- Et j'en oublie...

Tomographie Thermo-Acoustique (TAT)



- L'énergie est absorbée,
- chauffe les cellules,
- qui se dilatent,
- créant une onde sortante.

L'onde w vérifie.

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dt^2}(x, t) = c^2(x) \Delta w(x, t), & \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ w(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{dw}{dt}(x, 0) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où :

- c = vitesse de propagation *connue* du son dans les tissus,
- $(f, 0)$ est la donnée initiale.

Gebauer et Scherzer 2008 : $f \leftrightarrow$ absorption \leftrightarrow santé des cellules.

PROBLÈME INVERSE

Reconstruire f à partir d'observations partielles (externes au patient) pour obtenir une "image" localisant les cellules malades.

Formalisme mathématique

Soient

- ❶ X, Y deux espaces de Hilbert,
- ❷ $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ le générateur d'un semi-groupe \mathbb{T} ,
- ❸ $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$ un opérateur d'observation.

On considère

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

On observe z au travers C pendant un intervalle de temps $(0, \tau)$

$$y(t) = Cz(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

PROBLÈME INVERSE

Peut-on reconstruire z_0 à partir de $y(t)$?

Notons Ψ_τ l'opérateur

$$y(t) = \Psi_\tau z_0 = \begin{cases} C T_t z_0, & \forall t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall t > \tau. \end{cases}$$

Le problème inverse est bien posé $\Leftrightarrow \Psi_\tau$ est inversible à gauche.

Définition

(A, C) est exactement observable en temps τ s'il existe $k_\tau > 0$ tel que

$$\int_0^\tau \|C T_t z\|_Y^2 \geq k_\tau^2 \|z\|_X^2, \quad \forall z \in X.$$

Si (A, C) est exactement observable en τ , le problème est bien posé.

- ① Un cas particulier
- ② Sans observabilité exacte
- ③ Généralisation

- 1 Un cas particulier
- 2 Sans observabilité exacte
- 3 Généralisation

Un cas particulier

K. RAMDANI, M. TUCSNAK ET G. WEISS

Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers (AUTOMATICA, 2010)

D. AUROUX ET J. BLUM

A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems : the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm (NONLIN. PROC. GEOPHYS., 2008)

Un cas particulier

- $A : D(A) \rightarrow X$ est anti-adjoint, générateur de \mathbb{S} ,
- $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ est continu de X dans Y .

OBSERVATEUR DIRECT

Notons $A^+ = A - \gamma C^* C$, $\gamma > 0$, et considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+ z^+(t) + \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}^+(t) &= \dot{z}^+(t) - \dot{z}(t), \\ &= A^+ z^+(t) + \gamma C^* y(t) - Az(t), \\ &= A^+ (z^+(t) - z(t)), \\ &= A^+ e^+(t). \end{aligned}$$

(A, C) **exactement observable** \Rightarrow **stabilité exponentielle (Liu 1997)**.

Il existe $M^+ \geq 1$ et $\omega^+ > 0$ tels que

$$\|z^+(t) - z(t)\| \leq M^+ e^{-\omega^+ t} \|z_0^+ - z_0\|, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

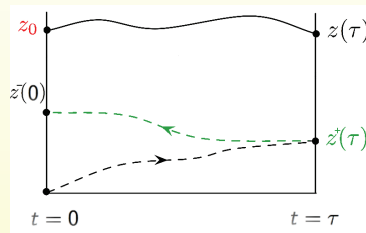
OBSERVATEUR DIRECT = APPROXIMATION DE L'ÉTAT FINAL

L'observateur direct z^+ tend vers z quand τ et t tendent vers l'infini.

OBSERVATEUR RÉTROGRADE

Notons $A^- = -A - \gamma C^* C$, $\gamma > 0$, et considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = -A^- z^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z^-(\tau) = z^+(\tau). \end{cases}$$



(A, C) exactement observable \Rightarrow stabilité exponentielle (Liu 1997).

Il existe deux constantes $M^- \geq 1$ et $\omega^- > 0$ telles que

$$\|z^-(t) - z(t)\| \leq M^- e^{-\omega^-(\tau-t)} \|z^+(\tau) - z(\tau)\|, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

D'après la première estimation de $\|z^+(t) - z(t)\|$, on a

$$\begin{aligned} \|z^-(0) - z_0\| &\leq M^- e^{-\omega^- \tau} \|z^+(\tau) - z(\tau)\|, \\ &\leq \underbrace{M^+ M^- e^{-(\omega^- + \omega^+) \tau}}_{=:\alpha} \|z_0^+ - z_0\|. \end{aligned}$$

τ SUFFISAMMENT GRAND ?

L'observabilité exacte en temps τ implique $\alpha < 1$, d'après un résultat de Ito, Ramdani et Tucsnak.

Remarque

En notant \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- les semi-groupes engendrés par A^+ et A^- , on voit que $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|$.

K. ITO, K. RAMDANI ET M. TUCSNAK

A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems
(DISCRETE CONTIN. DYN. SYST. SER. S, 2011)

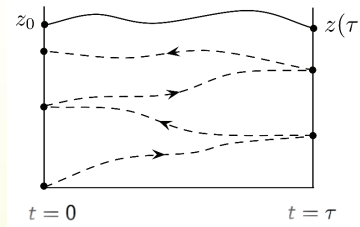
En itérant le processus en prenant à chaque cycle $z_0^+ = z^-(0)$, on obtient l'algorithme itératif

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = A^+ z_n^+(t) + \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_1^+(0) = z_0^+, \\ z_n^+(0) = z_{n-1}^-(0), & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = -A^- z_n^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(0), & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Alors avec $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$, on a

$$\|z_n^-(0) - z_0\| \leq \alpha^n \|z_0\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$



Remarque

En prenant $z_0^+ = 0$, on a ($\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$)

$$z^-(0) - z_0 = -\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0 \iff z_0 = (I - \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^{-1} z^-(0)$$

Et l'algorithme peut se voir comme la troncature de la série de Neumann

$$z_0 = \sum_{n \geq 0} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0).$$

Dans le cas général : *Estimabilité dans les sens direct et rétrograde.*

Existence d'opérateurs H^+ et H^- (avec certaines propriétés) de telle sorte que

$$A^+ = A + H^+C$$

et

$$A^- = -A + H^-C$$

soient les générateurs des semi-groupes \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- exponentiellement stables.

Difficultés additionnelles

- La construction (pratique) des opérateurs H^\pm est difficile.
- On ne sait pas comment choisir le temps d'observation τ .
- On ne peut reconstruire que les éléments de $\mathcal{D}(A)$.

Krstic, Guo et Smyshlyaev 2011,
Guo et Zhao 2011

- 1 Un cas particulier
- 2 Sans observabilité exacte
- 3 Généralisation

Sans observabilité exacte

MOTIVATION

Dans certains cas pratiques, **l'observabilité exacte du système n'est pas vérifiée**, mais on peut avoir accès à des informations *a priori* sur la donnée à reconstruire (placement, sens de propagation, etc.).

On suppose toujours que $A^* = -A$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\tau > 0$.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$
$$y(t) = Cz(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

On **ne suppose plus** que (A, C) est exactement observable en temps τ .

Considérons les systèmes direct et rétrograde suivants

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = A^+ z_n^+(t) + \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_1^+(0) = z_0^+, \\ z_n^+(0) = z_{n-1}^-(0), & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = -A^- z_n^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

avec $A^+ = A - \gamma C^* C$ et $A^- = -A - \gamma C^* C$ générateurs respectifs de \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- .

On montre simplement que

$$z_n^-(0) - z_0 = (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n (z_0^+ - z_0), \quad \forall n \geq 1.$$

QUESTION

Quel est le comportement de $(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n (z_0^+ - z_0)$ en fonction de n ?

Rappelons que $\Psi_\tau \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty), Y))$ est l'opérateur qui associe y à z_0 , et qu'il s'écrit, en notant \mathbb{S} le groupe unitaire engendré par A

$$y(t) = (\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C\mathbb{S}_t z_0, & \forall t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall t > \tau. \end{cases}$$

Proposition

On a la décomposition orthogonale

$$X = \text{Ker } \Psi_\tau \oplus (\text{Ker } \Psi_\tau)^\perp = V_{\text{Nobs}} \oplus V_{\text{Obs}},$$

et cette décomposition est préservée par l'opérateur $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+$.

De plus, $(\text{Ker } \Psi_\tau)^\perp = \overline{\text{Im } \Psi_\tau^*} = \overline{\text{Im } \Phi_\tau}$, où

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau \mathbb{S}_{\tau-t}^* C^* u(t) dt.$$

Théorème

Notons Π la projection orthogonale de X sur $V_{Obs} = \overline{\text{Im } \Phi_\tau}$.

- ❶ Pour tout $z_0, z_0^+ \in X$, on a

$$\|(I - \Pi)(z_n^-(0) - z_0)\| = \|(I - \Pi)(z_0^+ - z_0)\|, \quad \forall n \geq 1.$$

- ❷ La suite $(\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et vérifie

$$\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

- ❸ De plus, la décroissance est exponentielle, i.e. il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$, indépendante de z_0 et z_0^+ , telle que

$$\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\| \leq \alpha^n \|\Pi(z_0^+ - z_0)\|, \quad \forall n \geq 1,$$

si et seulement si $\text{Im } \Phi_\tau$ est fermé dans X .

PROBLÈME

Calculer Π n'est pas facile !

Corollaire

Si $z_0^+ \in V_{Obs}$, on a

$$\|z_n^-(0) - \Pi z_0\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

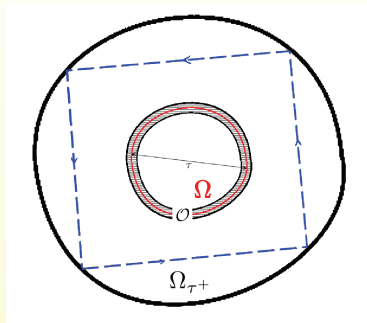
De plus, la décroissance est exponentielle si et seulement si $\text{Im } \Phi_\tau$ est fermée dans X .

Application à la TAT

$(w_0, 0)$ est la donnée initiale (à support localisé) de l'équation des ondes (dans \mathbb{R}^3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) = 0, \end{cases}$$

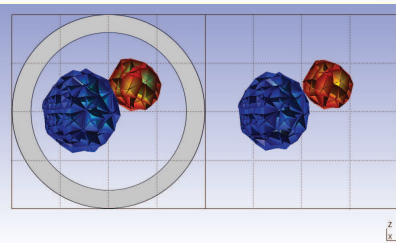
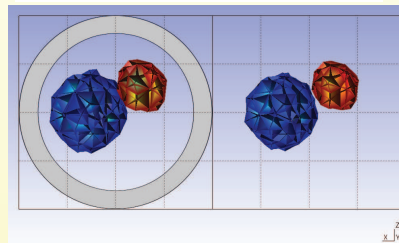
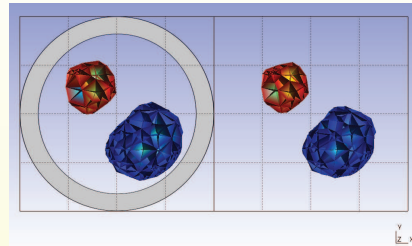
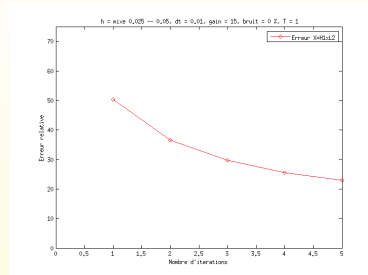
Idée : On se ramène en domaine borné, sans observabilité exacte.



- w_0 a son support dans Ω .
- On observe la vitesse de l'onde sur \mathcal{O} , pendant un intervalle de temps $(0, \tau)$ (τ bien choisi).
- On borne le domaine suffisamment loin : $\Omega_{\tau+}$.

On peut montrer que $(w_0, 0)$ est dans l'espace observable V_{Obs} et utiliser l'algorithme itératif pour reconstruire w_0 .

Logiciels utilisés : **Gmsh** / **GetDP**, discrétisation spatiale par éléments finis et temporel par le schéma de Crank–Nicolson.



- 1 Un cas particulier
- 2 Sans observabilité exacte
- 3 Généralisation**

Généralisation

Objectif principal :

Autoriser les opérateurs C non-bornés (observations frontières)

Cadre fonctionnel :

Les systèmes linéaires bien-posés

Soit Σ une famille d'opérateurs linéaires continus

$$(\Sigma_t)_{t \geq 0} : X \times L^2_{loc}([0, \infty), U) \longrightarrow X \times L^2_{loc}([0, \infty), Y).$$

On considère alors

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y|_{[0,t]} \end{bmatrix} = \Sigma_t \begin{bmatrix} z_0 \\ u|_{[0,t]} \end{bmatrix}.$$

Question ?

Quel est le lien entre les systèmes considérés jusqu'à présent et les systèmes linéaires bien posés ?

Autrement dit, quel est le lien entre

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = \textcolor{red}{z}_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

$$\textcolor{blue}{y}(t) = Cz(t)(+\textcolor{green}{D}u(t)), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

et

$$\begin{bmatrix} z(\tau) \\ \textcolor{blue}{y}|_{[0, \tau]} \end{bmatrix} = \Sigma_\tau \begin{bmatrix} \textcolor{red}{z}_0 \\ u|_{[0, \tau]} \end{bmatrix} ?$$

Théorème (Curtain, Weiss - 1989)

Soient X , U et Y trois espaces de Hilbert.

Un triplet d'opérateurs (A, B, C) engendre un système linéaire bien posé si

- ❶ A est le générateur d'un C_0 -semi-groupe \mathbb{T} sur X ,
- ❷ $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ est un opérateur de contrôle admissible pour \mathbb{T} ,
- ❸ $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ est un opérateur d'observation admissible pour \mathbb{T} ,
- ❹ il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel qu'une (et donc toute) solution $\mathbf{G} : \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(U, Y)$ de

$$\frac{\mathbf{G}(\alpha) - \mathbf{G}(\beta)}{\alpha - \beta} = -C(\alpha I - A)^{-1}(\beta I - A)^{-1}B, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}_\theta,$$

soit bornée sur \mathbb{C}_θ .

Inversément, si Σ est un système linéaire bien posé, alors il existe un triplet (unique) d'opérateurs (A, B, C) tel que les quatre précédentes affirmations soient vérifiées.

Hypothèses :

Σ est un système linéaire bien-posé (SLBP) engendré par (A, C^*, C) et A est anti-adjoint.

Construction des observateurs direct et rétrogrades :

Formellement, on prend $A^\pm = \pm A - \gamma C^* C$ pour un certain $\gamma > 0$.

Problème :

$\pm A - \gamma C^* C$ n'a pas de sens tel quel...

Solution :

Un résultat de stabilisation par feedback colocalisé de Curtain et Weiss (2006), permettant la construction de deux SLBP Σ^+ et Σ^- .

Définition

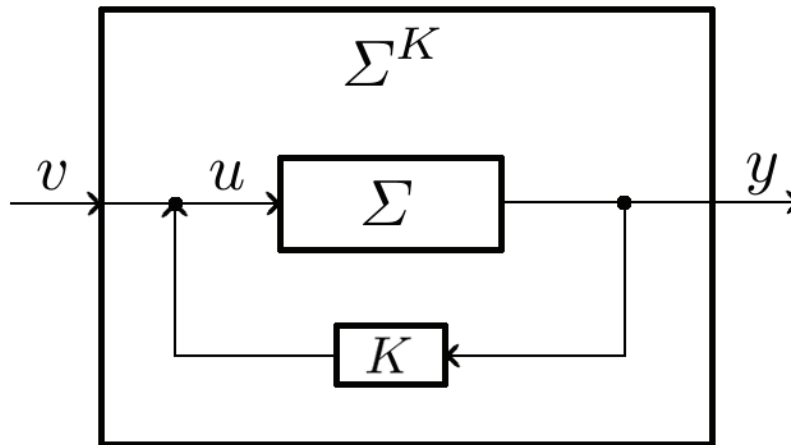
Soit Σ un SLBP de fonction de transfert \mathbf{G} . On dit que $K \in \mathcal{L}(Y, U)$ est un *opérateur de feedback admissible* pour Σ si $I - \mathbf{G}(s)K$ a un inverse pour un certain s .

Théorème (Weiss - 1994)

Si K est un opérateur de feedback admissible pour Σ , le *système en boucle fermée* Σ^K , i.e. Σ avec $u = Ky + v$ (v est le nouveau contrôle), est bien-posé.

De plus

$$\Sigma^K - \Sigma = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Sigma^K = \Sigma^K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Sigma.$$



Σ^K vu comme la boucle fermée de Σ par l'opérateur K .

Théorème (Curtain et Weiss - 2006)

Soit Σ un SLBP avec A anti-adjoint.

Il existe un $\kappa > 0$ (qui peut être infini) tel que pour tout $\gamma \in (0, \kappa)$, $-\gamma I$ est un opérateur de feedback admissible pour Σ . En d'autres termes, le contrôle $-\gamma y + v$ conduit à un SLBP en boucle fermée Σ^γ .

Remarque

La valeur de κ est liée à la norme d'un opérateur qui peut s'obtenir à l'aide de la fonction de transfert \mathbf{G} .

En particulier, si $0 \in \rho(A)$, on a $\kappa = \|E^+\|^{-1}$, où E^+ est la partie positive de

$$E = -\frac{1}{2} [\mathbf{G}^*(0) + \mathbf{G}(0)].$$

Rebarber et Weiss (2000) :

Sous certaines hypothèses (d'optimisabilité et d'estimabilité), Σ^γ est exponentiellement stable.

Au bout du compte :

On peut montrer le même théorème (à γ près) que lorsque C est borné, et on a toujours

Corollaire

Si $z_0^+ \in V_{Obs}$, on a

$$\|z_n^-(0) - \Pi z_0\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

De plus, la décroissance est exponentielle si et seulement si $\text{Im } \Phi_\tau$ est fermée dans X .

Exemple :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un domaine borné, de frontière $\partial\Omega = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1}$,
 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. On considère l'équation des ondes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ddot{w}(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, & \forall x \in \Omega, t > 0, \\ w(x, t) = 0, & \forall x \in \Gamma_0, t > 0, \\ w(x, t) = u(x, t), & \forall x \in \Gamma_1, t > 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \dot{w}(x, 0) = w_1(x), & \forall x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où u est le contrôle, et (w_0, w_1) la donnée initiale. On observe le système sur Γ_1

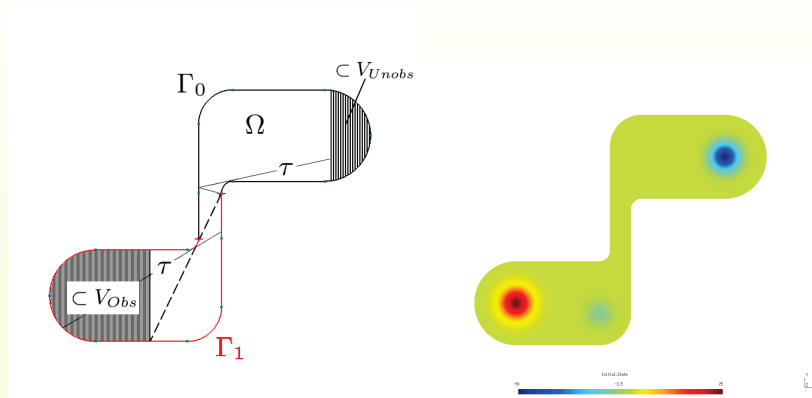
$$y(x, t) = -\frac{\partial(-\Delta)^{-1}\dot{w}(x, t)}{\partial\nu}, \quad \forall x \in \Gamma_1, t > 0.$$

Pour tout $\gamma > 0$, on construit l'algorithme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ddot{w}_n^+(x, t) - \Delta w_n^+(x, t) = 0, & \forall x \in \Omega, t \in (0, \tau), \\ w_n^+(x, t) = 0, & \forall x \in \Gamma_0, t \in (0, \tau), \\ w_n^+(x, t) = \gamma \frac{\partial(-\Delta)^{-1} \dot{w}_n^+(x, t)}{\partial \nu} + \gamma y(x, t) + u(x, t), & \forall x \in \Gamma_1, t \in (0, \tau), \\ w_1^+(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \dot{w}_1^+(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ w_n^+(x, 0) = w_{n-1}^-(x, 0), & \forall x \in \Omega, n \geq 2 \\ \dot{w}_n^+(x, 0) = \dot{w}_{n-1}^-(x, 0), & \forall x \in \Omega, n \geq 2, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ddot{w}_n^-(x, t) - \Delta w_n^-(x, t) = 0, & \forall x \in \Omega, t \in (0, \tau), \\ w_n^-(x, t) = 0, & \forall x \in \Gamma_0, t \in (0, \tau), \\ w_n^-(x, t) = \gamma \frac{\partial(-\Delta)^{-1} \dot{w}_n^-(x, t)}{\partial \nu} - \gamma y(x, t) + u(x, t), & \forall x \in \Gamma_1, t \in (0, \tau), \\ w_n^-(x, \tau) = w_n^+(x, \tau), & \forall x \in \Omega, \\ \dot{w}_n^-(x, \tau) = \dot{w}_n^+(x, \tau), & \forall x \in \Omega, \end{array} \right.$$

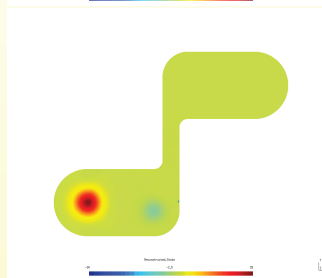
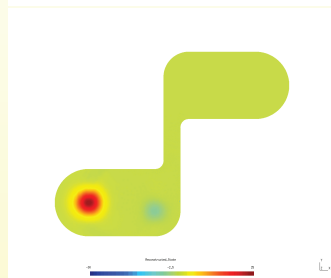
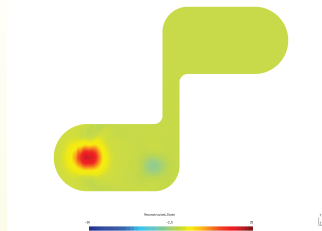
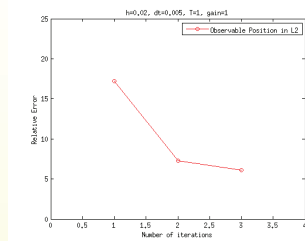


Un exemple de configuration en 2D et la donnée initiale w_0 ($w_1 \equiv 0$).

Implémentation sous GMSH et GetDP, avec $\gamma = 1$, $\tau = 1$ et $u \equiv 0$.

Discretisation spatiale : Éléments finis (P1, $h = 0.02$).

Discretisation temporelle : Newmark (inc. stable, $\Delta t = 0.005$).



Erreur relative de la “partie observable” dans L^2 et les trois premières reconstructions successives.

Perspectives et problèmes ouverts :

- Simulations numériques pour les équations de Maxwell.
- Algorithme avec perturbations aléatoires.
- Systèmes non-réversibles en temps.
- Algorithme avec perturbations non-linéaires.

Articles Soumis :

- G. HAINE
Recovering the initial data of an evolution equation. Application to thermoacoustic tomography
(INVERSE PROBLEMS, 2012)
- G. HAINE
Recovering the observable part of the initial data of an infinite-dimensional linear system
(MCSS, 2012)

Merci pour votre attention !